EXERCICE

Les parties I et II sont indépendantes.

n étant un entier naturel non nul, soient :

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ deux éléments de $\mathbb{C}^n$,

$a = (a_0, a_1, ..., a_{2n-1})$ un élément de $\mathbb{C}^{2n}$,

X la matrice-colonne associée à x ,

A la matrice-colonne associée à a ,

M(y) la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1^2 & y_2^2 & \cdots & y_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{2n-1} & y_2^{2n-1} & \cdots & y_n^{2n-1} \end{pmatrix}$.

I - On considère l'équation en X :

(1) $M(y) \cdot X = A$, A étant donnée,

et on numérote les équations linéaires associées de 0 à $2n-1$.

1 - Rappeler l'expression (sans démonstration) du déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

2 - On suppose que les y_k $(1 \leq k \leq n)$ sont tous distincts et non nuls. Écrire n conditions sur $y_1, y_2, ..., y_n$ (concernant l'annulation de n déterminants), pour que l'équation (1) admette une solution unique en x .

3 - Indiquer les conditions d'existence des solutions de l'équation (1) dans les deux cas suivants :

a) $y_{n-1} = y_n$, les y_k $(1 \leq k \leq n-1)$ étant tous distincts et non nuls ;

b) $y_n = 0$, les y_k $(1 \leq k \leq n-1)$ étant tous distincts et non nuls.

II - On se propose de résoudre (1) dans le cas $n = 3$ et $a_k = \dfrac{1}{k+1}$ pour $k \in \{0, ..., 2n-1\}$.

On note $s_1 = y_1 + y_2 + y_3$, $s_2 = y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1$ et $s_3 = y_1 y_2 y_3$.

On suppose $y \in \mathbb{C}^3$ choisi tel que l'équation (1) admette au moins une solution.

1 - a) Montrer que le triplet (s_1 , s_2 , s_3) est solution d'un système linéaire de 3 équations que l'on écrira (On pourra éliminer x_1 , x_2 , x_3 successivement entre les équations {(0), (1), (2), (3)} , puis {(1), (2), (3), (4)} , puis {(2), (3), (4), (5)}) .

b) En déduire un polynôme P dont les racines sont les nombres y_1 , y_2 , y_3 .

2 - Montrer que y a ses trois coordonnées distinctes et non nulles.

3 - Montrer que l'équation (1) admet encore au moins une solution si l'on remplace y par $(1 - y_1 , 1 - y_2 , 1 - y_3)$.

4 - Trouver les racines du polynôme P et résoudre (1) .

PROBLÈME

Notations :

- Pour tout ensemble E , on note id_E l'application identité sur E.

- Étant donné f un endomorphisme d'un espace vectoriel réel E et φ une forme bilinéaire symétrique sur E , on dit que φ est stable par f si et seulement si :
$\forall (u,v) \in E^2 , \varphi\big(f(u),f(v)\big) = \varphi(u,v)$

- Si $\mathcal{E}$ est un espace affine de direction E , une application g de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ est dite affine si et seulement si il existe un endomorphisme unique f de E vérifiant :
$\forall (M,N) \in \mathcal{E}^2 , f(\overrightarrow{MN}) = g(\overrightarrow{M})g(\overrightarrow{N})$; f est l'endomorphisme de E "associé à g ".

- Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

- Étant donné un ensemble E et une application f de E dans E , on dit que la suite $(a_1, a_2, ..., a_n)$ d'éléments de E forme un cycle pour f si et seulement si on a :
$a_{i+1} = f(a_i)$ pour $i \in \{ 1, ..., n - 1\}$
$a_1 = f(a_n)$
$\forall i \in \{ 2, ..., n\} , a_i \neq a_1$.

- Si E est un espace vectoriel réel et f un endomorphisme de E, on dit que f est un endomorphisme cyclique d'ordre n, s'il existe au moins un sous-ensemble $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ de n vecteurs de E qui, d'une part engendrent E, et d'autre part, forment un cycle pour f .

- Si $\mathcal{E}$ est un plan affine et g une application affine de $\mathcal{E}$, on dit que g est une application affine cyclique d'ordre n , s'il existe un ensemble de n points non alignés de $\mathcal{E}$ formant un cycle pour g .

I - Soit E un plan vectoriel réel et f un endomorphisme cyclique d'ordre n de E .

1 - Montrer que deux vecteurs quelconques d'un cycle sont distincts. Deux vecteurs consécutifs d'un cycle forment-ils une base de E ? f peut-elle être une homothétie de E ?
Établir les relations : $f^n = Id_E$ et $f^m \neq Id_E$ si $m < n$ ($m \in \mathbb{N}^*$). En déduire l'unicité de l'ordre de f .

2 - Montrer qu'il existe des bases $\mathscr{B}$ de l'espace vectoriel E dans lesquelles f est représentée par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$, a et b étant indépendants de la base $\mathscr{B}$ choisie. Établir que $a \in \{-1, 1\}$ et que $f^2 = a \cdot Id_E + b \cdot f$.
Montrer que le polynôme $P(\lambda) = \lambda^2 - b\lambda - a$ ne peut avoir de racine double. Caractériser f si les racines de P sont réelles.

On suppose désormais dans la suite du I que les racines de $P(\lambda)$ ne sont pas réelles.

3 - Soit $(v_1, v_2, ..., v_n)$ un cycle pour f . Montrer qu'il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ sur E , stable par f , et telle que l'on ait $\varphi(v_1, v_1) = 1$.
Montrer que φ définit sur E une structure euclidienne. Quelle est l'interprétation de f dans cette structure ?

4 - On pose $\varphi(v_1, v_2) = \cos\theta$ (justifier l'existence de θ) .
Exprimer v_k comme combinaison linéaire de v_1 et v_2 .
Exprimer f^k comme combinaison linéaire de f et de Id_E .
Pour k et ℓ entiers de $\{1, ..., n\}$, exprimer $\varphi(v_k, v_\ell)$.
Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

II - $\mathcal{E}$ est le plan affine associé à un plan vectoriel réel E ; g est une application affine cyclique d'ordre n ; f est l'endomorphisme de E associé à g .

1 - Montrer que f est cyclique d'ordre n et que g admet un point fixe unique.
Étudier le problème inverse : f étant un endomorphisme cyclique d'ordre n , on considère une application affine h du plan associée à f ; donner une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de f pour que h soit cyclique d'ordre n .

2 - Montrer qu'il existe des ellipses globalement invariantes par g et que par les points d'un cycle de g , il passe une telle ellipse et une seule.

3 - On donne n et les points A_1, A_2, A_3 fixés dans $\mathcal{E}$. Existe-t-il une transformation affine g cyclique d'ordre n pour laquelle A_1, A_2, A_3 soient trois points consécutifs d'un cycle ?
Dans l'affirmative, indiquer le nombre de solutions et, pour chacune d'elles, préciser le point fixe de g .
Comment doivent être liés quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 du plan pour qu'il existe une transformation affine cyclique d'ordre n pour laquelle A_1, A_2, A_3, A_4 sont quatre points consécutifs d'un cycle.

4 - On prend $n = 6$; A_1 et A_2 étant donnés, construire A_4, A_5 et A_6 connaissant A_3 .
On suppose de plus le plan euclidien (structure non liée à f) ; pour quels points A_3 , l'hexagone $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ a-t-il deux côtés consécutifs égaux ?